НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 14

8 ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

8.1 Общие положения

В непрерывных системах мы считаем, что все величины изменяются непрерывно во времени, да и само время изменяется непрерывно. Непрерывно – это значит, что сигнал определени в каждый (любой) момент времени и может принимать любое значение из области своего определения. В то же время наряду с непрерывными, в технике управления широкое применение находят так называемые дискретные системы.

В дискретных системах сигналы одной или нескольких переменных представляют собой последовательность импульсов.

Таким образом, *в дискретных системах одна или нескольких переменных представляют собой последовательность импульсов*.

Но какая польза от импульсов? Оказывается, эти импульсы могут нести информацию. Информация содержится в одном из параметров последовательности импульсов. Что это за параметры? Рассмотрим, что такое импульсный сигнал.

Импульсный сигнал представляет собой последовательность периодически повторяющихся сигналов одинаковой формы. Это может быть прямоугольная. треугольная, колоколообразная и другие формы. В управлении чаще всего применяется прямоугольная форма сигнала. Сигнал такой формы представлен на рисунке 8.1.

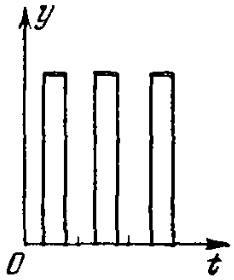

Рисунок 8.1 – Последовательность импульсов прямоугольной формы.

Импульсный сигнал характеризуется рядом параметров. Все они могут нести информацию. Но в качестве информативных используются только часть из них. Это:

1) амплитуда сигнала A;

2) период T, или частота ω повторения сигнала, причем $T = 2\pi/\omega$;

3) длительность импульса τ;

4) фаза появления импульсов относительно своей частоты, например, $\varphi = 1/(T_1 - T)$, где T – период повторения импульсов, T_1 – время появления данного импульса по отношению к предыдущему.

5) цифровой код.

Остановимся на цифровом коде. Что это такое? Каждый импульс импульсной последовательности может, в свою очередь, представлять собой пачку (набор) импульсов. Каждая такая пачка выражает цифровой код. Тогда информацию несет именно этот цифровой код. Дискретные системы, в которых информация представлена в виде цифрового кода, называются цифровыми системами. Цифровые системы являются важным классом дискретных систем. Сейчас большинство систем управления являются цифровыми.

Мы будем рассматривать дискретные системы, в которых, помимо импульсных переменных, содержатся обычные непрерывно изменяющиеся переменные. Это, например, параметры непрерывного объекта управления. То есть в системе управления присутствуют дискретная и непрерывная части. Структура такой системы может быть представлена в виде, показанном на рисунке 8.2.

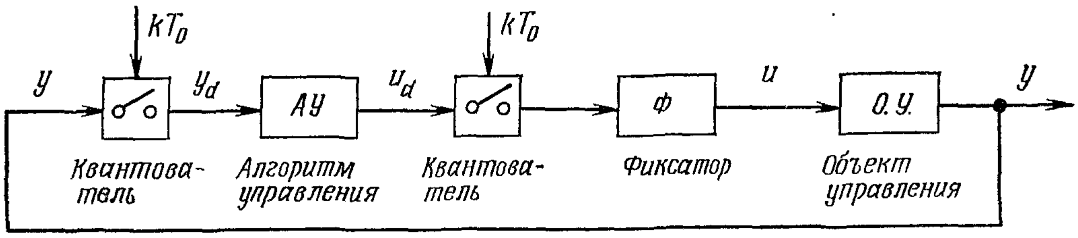

Рисунок 8.2 – Структура дискретной системы управления.

В этой системе в качестве регулирующего устройства фигурируют три блока: квантователь (модулятор), преобразователь импульсов и фиксатор. Непрерывная часть здесь представлена фиксатором и объектом управления.

Квантователь преобразовывает непрерывный сигнал в импульсный сигнал. Преобразователь импульсов изменяет информационную часть сигнала, оставляя сигнал импульсным. Фиксатор выполняет обратное преобразование импульсного сигнала в аналоговый.

Зачем стоить дискретные системы? Что они дают? Это мы рассмотрим в следующем подразделе.

8.2 Преимущества дискретных систем

Нужно отметить, прежде всего, что достаточно много физических процессов или измерительных преобразователей по своей природе являются дискретными, и поэтому мы вынуждены разрабатывать и применять соответствующий математический аппарат. Это, например, радиолокационные и радарные системы. Радиолокатор или радарный уровнемер периодически посылают радиоимпульсы в нужном направлении, например, в направлении самолета и также периодически воспринимают отраженный сигнал. Таким образом, в них передаваемые и принимаемые сигналы по своему принципу действия носят импульсный характер. Другой простой пример – это отрезание проволоки заданной длинны. Мы сначала отмеряем проволоку, при этом ее длина увеличивается, затем отрезаем ее, и эта длина падает до нуля. То есть мы имеем дело с импульсным сигналом. Вообще любой периодический процесс по своей природе дискретный и относится к дискретным системам.

Однако дискретные управляющие устройства используются часто для управления непрерывными объектами благодаря следующим своим преимуществам:

а) высокая помехозащищенность. Импульсы или есть, или их нет, это можно выяснить с высокой достоверностью даже в условиях помех. Если в результате действия помехи останется половина импульса, то все равно несложно выяснить, что он есть, и потери информации не произойдет.

б) высокая точность преобразований и отсутствие дрейфа. Это связано с тем, что с импульсами легче оперировать, чем с аналоговым сигналом.

в) более высокая надежность импульсных систем. Цифровой микроконтроллер с десятками тысяч элементов имеет такую же надежность, как и один транзистор. Как это не парадоксально, но факт.

г) меньшие габариты, масса и стоимость. Реле для коммутации мощности 10 КВт значительно дешевле и меньше, чем усилитель непрерывного действия на ту же мощность. Что касается микропроцессоров, то они также сейчас значительно меньше и дешевле аналоговых устройств сопоставимых функций. Это – заслуги микроэлектронных технологий.

д) высокая гибкость и удобство программирования. Это преимущество не нуждается в пояснении.

8.3 Виды модуляции

Мы рассмотрели, какие параметры импульсной последовательности используются для передачи информации. Однако сначала нужно преобразовать непрерывный сигнал в эти параметры. Этот процесс называется импульсной модуляцией, а устройство, выполняющее это преобразование, называется модулятором.

Таким образом, импульсной модуляцией называется процесс преобразования непрерывного сигнала в информационные параметры последовательности импульсов.

В зависимости от вида информационного параметра различают:

1) амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ);

2) широтно- импульсную модуляцию (ШИМ);

3) частотно- импульсную модуляцию (ЧИМ);

4) фазо- импульсную модуляцию (ФИМ);

5) аналого-цифровое преобразование (АЦП).

На рисунке 8.3 показан процесс модуляции для первых трех видов.

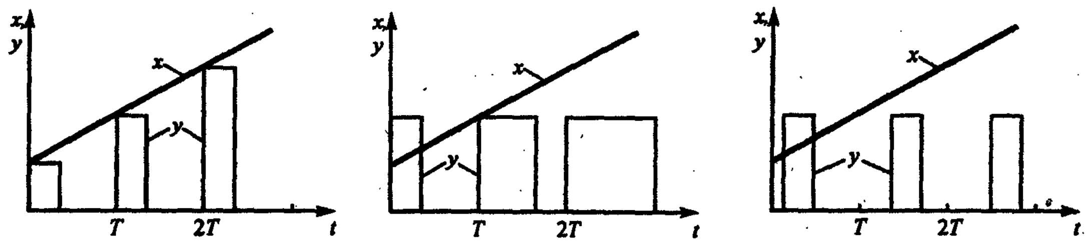

Рисунок 8.3 – Процесс АИМ, ШИМ и ЧИМ

Следует отметить, что преобразование в цифровой код происходит в фиксированные моменты времени. Обычно преобразование происходит через равные отрезки времени. Тогда время между соседними моментами преобразования называется периодом квантования.

Зависимость модулируемого параметра на выходе квантователя от значения непрерывного входного сигнала называется статической характеристикой квантователя. Отношение сигнала на выходе к входному сигналу называется коэффициентом передачи квантователя. Характеристика квантователя может быть линейной или нелинейной.

8.4 Разностные уравнения дискретных систем

Как мы уже говорили, дискретная система содержит непрерывную и дискретную части. В общем случае такая система является нелинейной. Наличие в этой системе непрерывных и дискретных сигналов сильно затрудняет ее полное описание и исследование. Полное, или точное описание – это когда поведение системы точно определено в любой момент времени, не только в моменты квантования.

Точное описание требуется в случаях, когда переменные объекта изменяются значительно между моментами квантования.

Таким образом, точное *описание дискретных систем применяется в случаях, когда переменные объекта изменяются значительно в течение периода квантования*.

Однако в случаях, когда длительность такта квантования достаточно мала по сравнению с инерционностью объекта, то есть тогда, когда переменные объекта изменяются незначительно между моментами квантования, можно ограничиться описанием всей системы только в моменты квантования. Часто на практике именно из таких соображений и выбирают длительность такта квантования. Тогда для достаточно полного описания дискретной системы достаточно определить ее состояние только в моменты квантования. В этом случае сигналы фиксируются только в дискретные моменты времени. Между дискретами поведение системы не определено. Такие системы называются системами дискретного времени, или дискретными системами.

Таким образом, *в системах дискретного времени поведение системы определено только в дискретные моменты времени. В промежутках между моментами квантования информация об изменениях непрерывной функции отсутствует*.

Если мы наблюдаем поведение системы только в дискретные моменты времени, то как описать динамические свойства этой системы? Ведь в дискретном времени нет ни производной, ни интеграла. Выясним этот вопрос.

Рассмотрим некоторую функцию *u* = *f(t)* (Рисунок 8.4).

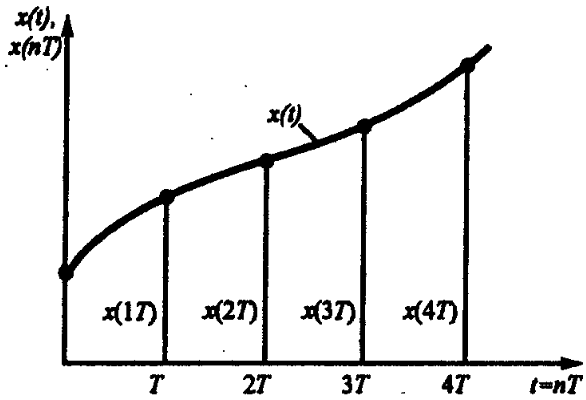

Рисунок 8.4 – Непрерывная функция *x(t)* и соответствующая ей решетчатая функция *x(kT)*

Мы рассматриваем функцию в дискретные моменты времени с периодом T, тогда дискретная функция в k – й момент времени может быть записана в виде

$$u(kT) = f(kT)\,, \tag{8.1}$$

где k – целое число.

Функция (8.1) называется решетчатой функцией.

Таким образом, *функция, определенная в дискретные моменты времени, называется решетчатой функцией*.

В (8.1) обозначение Т не несет никакой информации, поэтому условно опускаем его, имея в виду, что индекс k означает k – й момент времени с интервалом T. Тогда можно записать

$$u(k) = f(k). \tag{8.2}$$

Динамика процесса изменения непрерывной функции характеризуется ее производной. Для дискретных функций естественно эту динамику выражать приращением функции в соседние моменты времени. Это приращение называется разностью первого порядка. Различают прямую разность

$$\Delta u(k) = u(k+1) - u(k) \tag{8.3}$$

и обратную

$$\Delta_o u(k) = u(k) - u(k-1).$$

Они равноценны. Выражение (8.3), как уже говорилось, выражает разность первого порядка. Можно определить разность второго порядка, как приращение разности первого порядка в соседних точках времени. Таким же образом составляется разность n – го порядка. Она может быть записана в виде рекуррентной формулы (здесь через $\Delta^n u(k)$ обозначена разность n – го порядка последовательности $u(k)$.

$$\Delta^n u(k) = \Delta\left[\Delta^{n-1} u(k)\right] = \Delta^{n-1} u(k+1) - \Delta^{n-1} u(k), \tag{8.4}$$

где n изменяется от нуля. Нулевая разность есть сама решетчатая функция.

Рекуррентной называется формула, вычисления в которой производятся шаг за шагом, так, что на данном шаге используются результаты вычислений на предыдущем шаге. Заметим, что такая формула наиболее приспособлена для программирования и решения на ЭВМ.

Произведя вычисления в (8.4), можно выразить конечную разность произвольного порядка n через значения решетчатой функции в разные моменты времени. В итоге получается формула

$$\Delta^n u(k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-1} C_n^i u(k+n-i), \tag{8.5}$$

где C_n^i – число сочетаний из k элементов по i. Нулевая разность есть сама решетчатая функция.

Напомним, что C_n^i вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m}, \tag{8.5}$$

<u>Упражнение</u>: выразить конечную разность второго и третьего порядка через значения решетчатой функции.

Дискретным аналогом интеграла непрерывной функции в пределах от 0 до t для решетчатой функции является конечная сумма

$$u(k) = \frac{1}{T_u} \sum_{i=0}^{n-1} Tu(i) \ , \tag{8.6}$$

где T_u – постоянная времени интегрирования; T – период дискретизации.

В (8.6) используется аппроксимация (приближенное представление) интеграла непрерывной функции методом прямоугольников, о более точных методах аппроксимации речь пойдет позже. Операции вычисления конечных разностей и конечных сумм, так же как операции дифференцирования и интегрирования, являются линейными операциями, и для них справедлив принцип суперпозиции.

Рассмотрим дискретную систему с одной входной переменной e и одной выходной переменной u.

По своему смыслу выходная переменная этой системы зависит от входной переменной. Поскольку рассматриваемая система динамическая, то выходная переменная зависит не только от входной переменной в данный момент времени, но и от n приращений значений входной и выходной переменных. Тогда можно записать для нашей системы следующее уравнение

$$f(\Delta^n u(k), \Delta^{n-1} u(k), ..., u(k)) = \varphi(\Delta^n e(k), \Delta^{n-1} e(k), ..., e(k)) \ , \tag{8.6}$$

где f, φ – некоторые функции. Если система линейная, то для нее можно записать

$$a_n \Delta^n u(k) + a_{n-1} \Delta^{n-1} u(k) + ... + a_0 u(k) = b_n \Delta^n e(k) + b_{n-1} \Delta^{n-1} e(k) + ... + b_0 e(k) \ . \tag{8.7}$$

Уравнения (8.6, 8.7) называются разностными уравнениями n-го порядка, поскольку в них фигурируют разности n-го порядка. Порядок системы зависит от свойств самой системы так же, как порядок дифференциального уравнения определяется самой системой.

Используя (8.5), можно в (8.6, 8.7) перейти от разностей к значениям решетчатой функции в предыдущие моменты времени. Выполняя такие преобразования, получим для (9.6) и (9.7)

$$f(u(k), u(k-1), ..., u(k-n)) = \varphi(e(k), e(k-1), ..., e(k-n)) \ . \tag{8.8}$$

$$c_n u(k) + c_{n-1} u(k-1) + ... + c_0 u(k-n) = d_n e(k) + d_{n-1} e(k-1) + ... + b_0 e(k-n) \ , \tag{8.9}$$

где коэффициенты c_i, d_i зависят от a_i, b_i в (8.6, 8.7) и числа сочетаний в (8.5).

Уравнения (8.8, 8.9) эквивалентны (8.6, 8.7) и поэтому также являются разностными уравнениями

Таким образом, *уравнения, связывающие значения переменных динамической системы в дискретные моменты времени, называются разностными уравнениями.*

К какой категории отнести разностные уравнения: к функциям, функционалам или операторам? Из приведенных выражений видно, что разностные уравнения являются функциями. То есть они ставят в соответствие каждому набору своих независимых переменных в правой части определенное значение u. В этом отношении они проще дифференциальных уравнений и более приспособлены для вычислений на ЭВМ.

Таким образом, *разностные уравнения являются функциями.*

8.5 Z-преобразование дискретных сигналов

Известно, что для непрерывных линейных систем широко используется преобразование Лапласа. Мы переходим в область изображений, где операции с динамическими системами выполняются проще и нагляднее, чем во временной области. Для линейных дискретных систем также существует подобное преобразование, оно называется z – преобразование. Рассмотрим его.

При выводе z – преобразования также используется преобразование Лапласа. Но для применения преобразования Лапласа нужно, чтобы преобразуемая функция была непрерывной функцией времени, в то же время решетчатая функция не определена в моменты между отчетами. Для преодоления этой трудности для представления решетчатой функции используется δ-функция Дирака (обозначается "δ-функция", записывается в виде δ(t)). Напомним: δ-функция – это непрерывная функция, формирующая импульс в нулевой момент времени, длительность которого стремится к нулю, а амплитуда стремится к бесконечности при условии, что площадь импульса остается постоянной и равной единице. Во все моменты времени, отличные от нуля, δ-функция равна нулю. Решетчатая функция дискретной системы является последовательностью отчетов в разные моменты времени. Тогда каждому такому отчету можно поставить в соответствие дельта-функцию разной площади. Разная площадь получается умножением дельта-функции на коэффициент, равный амплитуде моделируемой функции. Для представления отчетов в разные (n – ные) моменты времени смещаем δ-функцию по временной оси на nT. Дельта-функция является математической идеализацией, но она очень удобна в описании систем, так как позволяет создать простой математический аппарат для описания процессов прохождения дискретных сигналов через линейные звенья. Это удобство из-за того, что *дельта-функция при непрерывном изменении времени выдает импульс в нулевой момент времени*.

В нашем случае, когда мы рассматриваем дискретную систему, δ-функция должна появляться в моменты дискретизации. Тогда совокупность единичных δ-функций, появляющихся в моменты дискретизации с течением времени можно записать в виде суммы

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \ldots$$

или

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)\,. \qquad (8.10)$$

Функция $\delta_T(t)$ в (8.10) является последовательностью мгновенных единичных импульсов, следующих с течением времени с интервалом T. Из (8.10) также следует, что с течением времени дискретно увеличивается также и n.

Она так и называется: функция единичных импульсов и широко используется при исследовании дискретных систем.

Решетчатая функция на основе функции единичных импульсов записывается в виде

$$u^*(t) = u(0)\cdot\delta(t) + u(T)\cdot\delta(t-T) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\cdot\delta(t-nT)\,. \qquad (8.11)$$

Это также серия $\delta(t)$ импульсов, следующих с интервалом T, но их амплитуда уже равна значениям модулируемого сигнала в моменты дискретизации. То есть это математическое описание решетчатой функции. Заметим, что $u(nT)$ отдельно от (8.11), то есть "в чистом виде", есть ступенчатая аппроксимация исходной функции $u(t)$, так как ступенчато изменяется n. Но это неточность описания решетчатой функции на результат не влияет, так как в моменты дискретизации ошибки нет, а в другие моменты δ-функция равна нулю.

Найдем преобразование по Лапласу (обозначается, как L-преобразование) функции $u^*(t)$

$$u^*(s) = L\{x^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) \cdot L\{\delta(t - nT)\}. \tag{8.12}$$

Здесь множитель $u(nT)$ в каждом элементе суммы является константой, не зависящей от времени (он зависит от n), поэтому его можно вынести за знак L-преобразования.

Найдем преобразование по Лапласу в (8.12). Напомним, что преобразование по Лапласу выглядит так

$$u(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt .$$

Известно, что преобразование по Лапласу от дельта – функции равно единице; преобразование от запаздывающей функции $u(t\text{-}\tau)$ равно экспоненте от τs, поэтому можно получить, что

$$u^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) e^{-nTs} . \tag{8.13}$$

Выражение (8.13) есть прямое дискретное преобразование Лапласа (обозначается, как L_D – преобразование).

Можно показать, что L_D – преобразование дискретной функции является периодической функцией с частотой повторения

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} . \tag{8.14}$$

Таким образом, L_D – *преобразование дискретной функции является периодической функцией с частотой повторения* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Мы знаем, что изображения (то есть L-преобразования) непрерывных функций являются функциями s. Из (8.13) видно, что изображение (L_D-преобразование) решетчатой функции является функцией переменной e^{Ts}. Введем новую переменную в (8.13)

$$z = e^{Ts} . \tag{8.15}$$

Известно, что выражение $W(s) = e^{-Ts}$ есть передаточная функция запаздывающего звена на время T. Тогда (8.15) интерпретируется, как передаточная функция предсказывающего звена на один такт квантования T.

Подставляя в (8.13) (8.14), получаем

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \ . \qquad (8.16)$$

Выражение (8.16) определяет математическую операцию, получившую название прямого z-преобразования. Оно также называется L_D-преобразованием.

Таким образом, *преобразование Лапласа от решетчатой функции, в которой введена новая переменная* $z = e^{Ts}$, *называется z-преобразованием этой функции.*

<u>Пример 8.1.</u> Выполнить z-преобразование ступенчатой решетчатой функции амплитудой k. Во времени эта функция выглядит так

$$x(nt) = k \ . \qquad (8.17)$$

Подставляя (8.17) в (8.16), получаем (используется формула для суммы геометрической прогрессии)

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k \cdot z^{-n} = k(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots) = \frac{k}{1 - z^{-1}} = \frac{kz}{z - 1} \ . \qquad (8.18)$$

Используется также и обратное преобразование z-преобразованного сигнала в непрерывный сигнал, на эта операция неоднозначна. В общем случае z-преобразование и обратное преобразование – достаточно сложные операции. Далее будут рассмотрены методы их упрощения.

По аналогии с непрерывным случаем составлены таблицы z-преобразования для распространенных решетчатых функций. Основные теоремы z-преобразования аналогичны свойствам L-преобразования. Это линейность, сдвиг во временной области, конечное значение, начальное значение, изменение масштаба в области z.